ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.76

ИНДУЦИРОВАННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ОДНОРОДНЫХ 3-ЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП ЛИ

В.В.Балащенко
(Белорусский университет)

В этой работе получен критерий согласованности индуцированной инвариантной связности на однородном 3-циклическом пространстве линейной группы Ли и канонической инвариантной почти комплексной структуры этого пространства.

Пусть Φ -аналитический автоморфизм третьего порядка ($\Phi^3 = id$) связной группы Ли G, $\varphi = d\Phi_e$ -соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, H -замкнутая подгруппа в G, удовлетворяющая условию $G^\Phi_\circ \subset H \subset G$, где $G^\Phi_\circ$ -связная компонента единицы подгруппы G^Φ неподвижных точек автоморфизма Φ. Возникающее здесь однородное Φ-пространство [4] G/H впервые введено и изучено Н.А.Степановым в [5] и названо им однородным 3-циклическим пространством.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ -каноническое редуктивное разложение $\mathfrak{g}$ [4], соответствующее автоморфизму φ. В [5] доказано, что G/H обладает канонической [5] инвариантной почти комплексной структурой J, определяемой заданием на $\mathfrak{m}$ оператора $J_\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Theta^2 - \Theta)$, где $\Theta = \varphi/_{\mathfrak{m}}$. Согласованная с J инвариантная аффинная связность на G/H называется [5] почти комплексной связностью.

Пусть теперь G -линейная группа Ли, представленная в виде аналитической подгруппы в $G_\circ = GL(n,K)$, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_\circ = \mathfrak{gl}(n,K)$ -алгебра Ли группы Ли $G_\circ$. Обозначим через $M = \{\Phi(g)g^{-1} \mid g \in G\}$ подмногообразие в G, являющееся реализацией В.И.Ведерникова [3] однородного Φ-пространства G/G^Φ. Предположим, что на M задано инвариантное N-оснащение [1], P-оператор проектирования векторов из $\mathfrak{g}_\circ$ на $\mathfrak{m}$ в направлении инвариантной нормали N [1].

Т е о р е м а. Пусть ∇ -инвариантная аффинная связность, индуцированная на однородном 3-циклическом пространстве

M линейной группы Ли G инвариантным N-оснащением, причем подпространство $N \cap \mathfrak{g}$ φ-инвариантно. Для того, чтобы ∇ являлось почти комплексной связностью (относительно J), необходимо и достаточно, чтобы для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ выполнялось равенство:

$$\Theta P(X,Y) = P(\Theta(Y), X). \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α -функция Номидзу [6] инвариантной аффинной связности ∇ на M. Известно [5], что ∇ - почти комплексная связность тогда и только тогда, когда для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$J_\circ \alpha(X,Y) = \alpha(X, J_\circ Y). \qquad (2)$$

В случае индуцированной связности ∇ ее функция Номидзу вычислена в [1] и может быть записана в виде

$$\alpha(X,Y) = A_\varphi^{-1} P([\varphi(X), A_\varphi Y] + A_\varphi Y \cdot A_\varphi X), \qquad (3)$$

где $X, Y \in \mathfrak{m}$, $A_\varphi = \varphi - id$. Отметим также, что Θ удовлетворяет [5] условию

$$\Theta^2 + \Theta + id = 0. \qquad (4)$$

Кроме того, из [2] следует, что в нашем случае $N \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, и потому на $\mathfrak{g}$ справедливо равенство

$$\Theta \circ P = P \circ \varphi. \qquad (5)$$

Необходимость. Если ∇ -почти комплексная связность, то для ее функции Номидзу α (3) выполняется условие (2). Используя (4), (5) и перестановочность Θ и A_φ, имеем: $\sqrt{3} J_\circ \alpha(X,Y) =$

$$= -2A_\varphi^{-1} P\varphi[\Theta(X), A_\varphi Y] - 2A_\varphi^{-1} \Theta P(A_\varphi Y \cdot A_\varphi X) - \alpha(X,Y).$$

Аналогичные соображения позволяют вычислить: $\sqrt{3}\,\alpha(X, J_\circ Y) =$

$$= -\alpha(X,Y) - 2A_\varphi^{-1} P\varphi[X, A_\varphi Y] - 2A_\varphi^{-1} P(A_\varphi(\Theta(Y)) \cdot A_\varphi X).$$

Записывая теперь условие (2), в силу невырожденности A_φ на $\mathfrak{m}$ приходим к равенству $\Theta P(A_\varphi X \cdot A_\varphi Y) = P(\Theta(A_\varphi Y) \cdot A_\varphi X)$, откуда немедленно следует (1).

Достаточность. Из равенства (1) с учетом проделанных выше преобразований для функции α (3) можем получить условие (2). Последнее означает [5], что ∇ -почти комплексная связность.

Напомним, что инвариантная нормаль N на однородном Φ-пространстве M называется самосопряженной [2], если существует такое продолжение $\varphi_\circ$ автоморфизма φ на алгебру Ли $\mathfrak{g}$, что $\varphi_0(\mathcal{N})=\mathcal{N}$.

С л е д с т в и е 1. Пусть $\mathcal{N}$ -инвариантная самосопряженная (относительно φ_0) нормаль на M. ∇ является почти комплексной связностью тогда и только тогда, когда для всех $X,Y\in\mathfrak{m}$ выполняется условие

$$\varphi_0(XY)-\varphi(Y)X\in\mathcal{N}. \qquad (6)$$

Подробнее рассмотрим теперь ситуацию для классических продолжений φ_0 автоморфизма φ. Обозначим через $\mathfrak{m}^2$ и $\mathfrak{m}$ подпространства в $\mathfrak{g}_0$, порожденные векторами X^2 и XY соответственно, где $X,Y\in\mathfrak{m}$. Условимся также, следуя [5], называть M локально симметрическим пространством, если выполняется соотношение $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$.

С л е д с т в и е 2. Пусть $\mathcal{N}$ -инвариантная самосопряженная (относительно φ_0) нормаль на M, где φ_0 является автоморфизмом ассоциативной алгебры $\mathfrak{g}_0$. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) ∇ -почти комплексная связность; 2) ∇ -каноническая связность второго рода ($\alpha=0$); 3) M -локально симметрическое пространство и $\mathfrak{m}^2\subset\mathcal{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) $\Rightarrow$ 2). Условие (6) принимает вид: $\varphi(X)\varphi(Z)-\varphi(Z)X\in\mathcal{N}$ для всех $X,Z\in\mathfrak{m}$. Полагая $Z=\varphi^{-1}(A_\varphi Y)$ и учитывая (3), получим: $\alpha=0$. 2) $\Rightarrow$ 3). Тензор кручения ∇ имеет вид: [6]: $T(X,Y)=-[X,Y]_{\mathfrak{m}}$. Но индуцированная связность обладает [1] нулевым кручением. Следовательно, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$. Тогда [6] ∇-каноническая связность 1-го рода, а это означает [1], что для всех $X\in\mathfrak{m}$

$$[X,\varphi(X)]+(A_\varphi X)^2\in\mathcal{N}. \qquad (7)$$

Поскольку $[X,\varphi(X)]\in\mathfrak{h}\subset\mathcal{N}$, то получаем $\mathfrak{m}^2\subset\mathcal{N}$. Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) доказывается с использованием тех же фактов, а

2) $\Rightarrow$ 1) вытекает из (2). Пусть $\sigma(Z)$ означает либо Z, либо $\bar{Z}$.

С л е д с т в и е 3. Пусть $\mathcal{N}$ -инвариантная самосопряженная (относительно φ_0) нормаль на M, где φ_0 имеет вид: $\varphi_0(Z)=-S\sigma(Z)^T S^{-1}$, $S\in G_0$. ∇ является почти комплексной связностью тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}\subset\mathcal{N}$.

Библиографический список

1. Б а л а щ е н к о В.В. Инвариантные оснащения и индуцированные связности на регулярных φ-пространствах линейных групп Ли // ДАН БССР. 1979. Т. 23. № 3. С. 209-212.

2. Б а л а щ е н к о В.В. Индуцирование связностей, порожденных диффеоморфизмом регулярного Φ-пространства линейной группы Ли// Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I, Физ., мат. и мех. 1986, №1. С. 56-59.

3. В е д е р н и к о в В.И. Обобщенные симметрические пары// Матер. II Прибалт. геом. конф. Тарту, 1965. С. 36-37.

4. С т е п а н о в Н.А. Однородные 3-циклические пространства// Изв. вузов. Математика. 1967. № 12. С. 65-74.

5. С т е п а н о в Н.А. Основные факты теории φ-пространств// Изв. вузов. Математика. 1967. № 3. С. 88-95.

6. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces: Amer. J. Math., 1954. v. 76. No. 1. P. 33-65.